OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER, 1900. Nr. 1.

Note supplémentaire relative aux développements schlœmilchiens en série de fonctions cylindriques.

Par

Niels Nielsen.

Dans une *Note* que j'ai eu l'honneur de présenter à *l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark* dans la séance du 17 novembre 1899 et qui vient d'être imprimée dans les *Bulletins* de *l'Académie*, j'ai démontré la formule

$$(\alpha) \qquad \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} J^{\mu}(px)}{p^{\mu-2r}} = 0,$$

qui est vraie dans l'intervalle $-\pi < x < +\pi$, pourvu que le paramètre μ et le positif entier r satisfassent à l'inégalité $\Re(\mu-2r) > -\frac{1}{2}$.

Dans le rapport sur ma note citée, M. Gram remarque qu'il sera d'un certain intérêt de connaître la somme de notre série infinie pour les valeurs de x situées hors de l'intervalle ci-dessus indiqué. On trouvera dans la présente *Note* une solution complète de ce problème. Il est bien remarquable, ce me semble, que cette sommation puisse être effectuée sous *une forme finie à l'aide des fonctions les plus élémentaires.*

Dans ma *Note* précédente, j'ai démontré la formule

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{p=n}{}' \frac{(-1)^{p-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu} J^{\mu}(px)}{p^{\mu}} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\mu+1)} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\omega x\right)}{\cos\left(\frac{\omega x}{2}\right)}(1-\omega^2)^{\mu-\frac{1}{2}}d\omega, \end{aligned}\right.$$

où n désigne un positif entier quelconque, et où $\Re(\mu)$ doit être plus grand que $-\frac{1}{2}$. Transformons maintenant l'intégrale définie qui figure au second membre de (β) en y posant $\frac{\omega}{x}$ au lieu de ω, nous aurons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{p=n}{}' \frac{(-1)^{p-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu} J^{\mu}(px)}{p^{\mu}} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\mu+1)} - \frac{(-1)^n}{x\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int_0^x \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\omega}{\cos\frac{\omega}{2}}\left(1-\frac{\omega^2}{x^2}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}d\omega. \end{aligned}\right.$$

Remarquons qu'au premier membre de (1) la somme est une fonction *paire* de x; on vérifiera, du reste, facilement que c'est la même chose pour le second membre de la même formule.

Supposons maintenant que x désigne une quantité réelle, située entre deux multiples impairs consécutifs de π, savoir:

$$(\pm 2s-1)\pi < x < (\pm 2s+1)\pi,$$

s étant un entier plus grand que l'unité.

Pour déterminer la valeur de l'intégrale qui figure à (1), supposons en premier lieu x *positif*, et divisons en plusieurs autres l'intervalle depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = x$, savoir:

1° depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \pi - \delta_1$

2° » $\omega = (2q-1)\pi - \delta_q$ » $\omega = (2q-1)\pi + \varepsilon_q$, $q = 1, 2, 3, \ldots s$,

3° » $\omega = (2q-1)\pi + \varepsilon_q$ » $\omega = (2q+1)\pi - \delta_{q+1}$, $q = 1, 2, 3, \ldots s-1$,

4° » $\omega = (2s-1)\pi + \varepsilon_s$ » $\omega = x$.

Dans ces intervalles, toutes les quantités δ_q, ε_q désignent des

constantes positives finies, mais aussi petites qu'on le veut. Cela posé, on peut mettre:

$$(\gamma) \qquad \int_0^x = \int_0^{\pi-\delta_1} + \int_{(2s-1)\pi+\varepsilon_s}^{x} + \sum_{q=1}^{q=s-1} H_q + \sum_{q=1}^{q=s} I_q ,$$

où l'on a posé

$$H_q = \int_{(2q-1)\pi+\varepsilon_q}^{(2q+1)\pi-\delta_{q+1}} \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\omega}{\cos\frac{\omega}{2}} \left(1 - \frac{\omega^2}{x^2}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} d\omega ,$$

$$I_q = \int_{(2q-1)\pi-\delta_q}^{(2q-1)\pi+\varepsilon_q} \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\omega}{\cos\frac{\omega}{2}} \left(1 - \frac{\omega^2}{x^2}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} d\omega .$$

Maintenant faisons croître le positif entier n au delà de toute limite, mais de sorte que tous les produits $n\delta_q$, $n\varepsilon_q$ croissent à l'infini tandis que les quantités δ_q, ε_q doivent s'évanouir. Cela posé, on verra facilement que les quantités I_q deviendront des intégrales de Dirichlet. En effet, posons dans I_q

$$\omega = (2q-1)\pi + \eta ,$$

cette intégrale pourra s'écrire

$$(\delta) \qquad (-1)^n I_q = \int_{-\delta_q}^{\varepsilon_q} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\eta}{\sin\frac{\eta}{2}} \left(1 - \frac{((2q-1)\pi+\eta)^2}{x^2}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} d\eta ,$$

ce qui, d'après le théorème fondamental de Dirichlet dans ses recherches sur les séries de Fourier, donnera:

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} (-1)^n I_q = 2\pi \left(1 - \frac{(2q-1)^2\pi^2}{x^2}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}.$$

En effet, supposant μ imaginaire, on pourra mettre

$$\left(1 - \frac{((2q-1)\pi+\eta)^2}{x^2}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} = \mathfrak{R} + \mathfrak{J} ,$$

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{J}$ désignant des fonctions réelles de la variable réelle η. Or, cette réduction faite, la formule de Dirichlet s'appliquera

et à $\Re$ et à $\Im$, ce qui démontrera immédiatement notre formule (2) dans toute sa généralité.

On verra de la même manière que les autres intégrales qui figurent au second membre de (γ), tendent vers zéro sous les conditions indiquées plus haut.

Supposons spécialement $x = (2s+1)\pi$, nous aurons encore

$$(2\,\mathrm{a})\quad \lim_{n=\infty} (-1)^n \int_{(2s-1)\pi+\varepsilon_s}^{(2s+1)\pi} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \text{ selon que } \Re(\mu) \gtrless +\tfrac{1}{2}\,;$$

supposant $\Re(\mu) = +\frac{1}{2}$, on verra que l'intégrale en question est généralement indéterminée, à moins que $\mu = \frac{1}{2}$; en ce cas, l'intégrale est égale à π.

Ainsi nous venons de démontrer la formule

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu} J^{\mu}(px)}{p^{\mu}}$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(\mu+1)} - \frac{2\sqrt{\pi}}{x\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \cdot \sum_{q=1}^{q=s} \left(1 - \frac{(2q-1)^2\pi^2}{x^2}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}.$$

Enfin, supposons que x soit *négatif*, savoir:

$$(-2s-1)\pi < x < (-2s+1)\pi\,,$$

nous verrons par le même procédé que les limites des intégrales analogues à I_q seront permutées, de sorte que ces intégrales auront le signe contraire. Cela posé, nous aurons, d'une manière générale:

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu} J^{\mu}(px)}{p^{\mu}} = \\ \displaystyle\frac{1}{2\Gamma(\mu+1)} - \operatorname{sgn} x \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{x\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \cdot \sum_{q=1}^{q=s} \left(1 - \frac{(2q-1)^2\pi^2}{x^2}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

formule qui est vraie, pourvu que $\Re(\mu) > -\frac{1}{2}$, *et que* x *soit une quantité réelle, choisie de sorte que* $(\pm 2s-1)\pi < x < (\pm 2s+1)\pi$ s *étant un entier plus grand que un. Supposons spécialement* $x = \pm(2s+1)\pi$, *notre formule ne sera juste que si* $\Re(\mu) > +\frac{1}{2}$.

La notation $\operatorname{sgn} x$, due à Kronecker (signum x, signe de x), n'est autre chose que $+$ ou $-$, selon que x est positif ou négatif.

Dans le cas $\mu = +\frac{1}{2}$, $(\pm 2s - 1)\pi < x < (\pm 2s + 1)\pi$, on retombe dans la formule bien connue

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} \sin px}{p} = \frac{x}{2} - \operatorname{sgn} x \cdot s\pi.$$

Supposons $x = \pm(2s+1)\pi$, $\Re(\mu) \leqq \frac{1}{2}$, la série qui figure au premier membre de (3) ne sera pas convergente, ce qui s'accorde bien avec la valeur asymptotique de $J^{\mu}(x)$ pour les valeurs extrêmement grandes de x.

La formule (3) est essentielle dans les recherches qui nous occupent. En effet, posons-y $x = \sqrt{y}$, nous aurons, après une légère modification:

$$2^{\mu} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} y^{-\frac{\mu}{2}} J^{\mu}(p\sqrt{y})}{p^{\mu}}$$

$$= \frac{1}{2\,\Gamma(\mu+1)} - \operatorname{sgn} x \cdot \frac{2\sqrt{\pi}\, y^{-\mu}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \cdot \sum_{q=1}^{q=s} (y - (2q-1)^2 \pi^2)^{\mu-\frac{1}{2}}.$$

Différentiant ensuite cette équation r fois, par rapport à y, et appliquant la formule de Leibniz pour la différentiation répétée d'un produit, nous aurons finalement par la méthode expliquée dans la Note précédente:

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1} J^{\mu}(px)}{p^{\mu-2r}} \\ &= -\operatorname{sgn} x \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu-r)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu-2r-1} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{m=r} \sum_{q=1}^{q=s} (-1)^m \binom{r}{r-m} \frac{\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(\mu-r-m+\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{(2q-1)^2\pi^2}{x^2}\right)^{\mu-r-m-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

ce qui est la formule cherchée, valable dans les cas suivants:

1° $\Re(\mu - 2r) > -\frac{1}{2}$, $(\pm 2s - 1)\pi < x < (\pm 2s + 1)\pi$, *s étant un entier plus grand que un.*

2° $x = \pm(2s+1)\pi$, $\Re(\mu - 2r) > +\frac{1}{2}$.

3° $s = 0$, *le second membre de* (4) *n'a pas de sens; dans ce cas, la série aura dans tout l'intervalle une somme égale à zéro, pourvu que* $\Re(\mu - 2r) > -\frac{1}{2}$.

Ces résultats nous fournissent un moyen de poursuivre la fonction discontinue représentée par la somme de la série infinie (4) quand nous faisons varier x. Nous verrons que cette fonction saute brusquement quand x dépasse un multiple impair de π, cette valeur rendant ou non la fonction infinie.

En effet, posons $x = (2q+1)\pi + \varepsilon_1$, la somme de notre série représentera une nouvelle fonction différente de celle qu'elle vient de représenter pour l'argument $x = (2q+1)\pi - \varepsilon$, ε et ε_1 étant deux quantités positives finies, mais aussi petites qu'on le veut. Dans l'intervalle depuis $x = (2q+1)\pi + \varepsilon_1$ jusqu'à $x = (2q+3)\pi - \varepsilon_2$ (où la série est uniformément convergente), la somme représente une fonction continue pour sauter de nouveau brusquement quand x dépasse la valeur critique suivante, $x = (2q+3)\pi$, et ainsi de suite.

Remarquons ici que M. Gubler a fait voir que la raison de la discontinuité bien connue de l'intégrale

$$\int_0^\infty J^a(x)\, J^b(cx)\, dx\,,$$

doit aussi être cherchée dans un alternat de fonction; voir à ce sujet l'article de M. Gubler: *Ueber ein diskontinuirliches Integral, Mathematische Annalen*, t. 48, p. 48, ou bien le bel ouvrage de MM. Graf et Gubler: *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen*, II Heft, p. 148, Bern 1900.

Copenhague, le 23 janvier 1900.